1. Der Schulz-Effekt

$H_0: p = 0{,}21$ [+1] $\quad X \leq 50$ [+1]

$H_1: p = 0{,}3 \quad X > 50$ D2

α-Fehler:

$P_{H_0}(H_1) = P_{H_0}(X > 50) = 1 - P_{H_0}(X \leq 50) = 1 - F(200; 0{,}21; 50)$ [+1] [+1]

$= 1 - 0{,}928 \approx 0{,}072 = 7{,}2\%$ [+0,5] D2,5

β-Fehler:

$P_{H_1}(H_0) = P_{H_1}(X \leq 50) = F(200; 0{,}3; 50) \approx 0{,}0695$ [+1] [+1] D2

Erklärung:

Der Alphafehler entspricht der Wahrscheinlichkeit, mit der Schulz aufgrund der Tests glaubt, dass ~~tatsächlich~~ 30% der Wahlberechtigten die SPD, während es in Wirklichkeit weiterhin nur 21% sind. D1,5

2. Das bereitet mir Kopfschmerzen...

a) $H_0: p = 40\%$ [+0,5] $\quad X < 41$ [+1] D1,5

$H_1: p > 40\% \quad X \geq 41$

$P_{H_0}(H_1) = P_{H_0}(X \geq 41) = 1 - P_{H_0}(X \leq 40) = 1 - F(100; 0{,}4; 40)$ [+1] [+1]

$= 1 - 0{,}543 = 0{,}457 \approx 45{,}7\%$ [+0,5] D2,5

Stellungnahme

Die Wahrscheinlichkeit, dass man nach diesem Test glaubt, das neue Medikament wirke besser, obwohl es in Wirklichkeit nicht besser wirkt, beträgt 45,7% und ist somit recht hoch. [+1] Meiner Meinung nach zu hoch, um den Ansprüchen eines Pharmakonzerns hinsichtlich der Verlässlichkeit von Tests zu genügen. [+1] D2,5

b) $P_{H_0}(H_1) \overset{!}{<} 0{,}03$ [+0,5]

$\Rightarrow P_{H_0}(X \geq K) = 1 - P_{H_0}(X \leq K-1) = 1 - F(100; 0{,}4; K-1) < 0{,}03$ [+1]

$\Rightarrow 0{,}97 < F(100; 0{,}4; K-1)$ [+1]

$F(100; 0{,}4; 49) = 0{,}9729 \Rightarrow K-1 = 49 \Rightarrow K = 50$ [+1] D4

$F(100; 0{,}4; 48) = 0{,}9577$ [+0,5]

D.h. Entscheidung für H_1, falls min. 50 Patienten durch das Medikament geheilt werden.

3. Rosinen rauspicken!

a) $H_0: p = 0{,}2 \quad 36 \leq X \leq 44$ [+1] D1

$H_1: p \neq 0{,}2 \quad X < 36$ ODER $44 < X$

$P_{H_0}(H_1) = P_{H_0}(36 > X) + P_{H_0}(44 < X)$ [+1]

$= P_{H_0}(X \leq 35) + 1 - P_{H_0}(X \leq 44) = F(200; 0{,}2; 35) + 1 - F(200; 0{,}2; 44)$ [+1]

$\approx 0{,}215 + 1 - 0{,}789 = 0{,}426 = 42{,}6\%$ [+1] D3

b) $H_0: p = 0{,}2 \quad K_1 \leq X \leq K_2$

$H_1: p \neq 0{,}2 \quad X < K_1$ ODER $X > K_2$

→ Die Wahrscheinlichkeit von 4% wird gleichmäßig auf die obere und die untere Grenze aufgeteilt, d.h. je 2%

i) $P_{H_0}(X < K_1) = P_{H_0}(X \leq K_1 - 1) = F(200; 0{,}2; K_1 - 1) < 2\%$

$F(200; 0{,}2; 29) \approx 0{,}0283$

$F(200; 0{,}2; 28) \approx 0{,}0179 \Rightarrow K_1 - 1 = 28 \Rightarrow K_1 = 29$

ii) $P_{H_0}(X > K_2) = 1 - P_{H_0}(X \leq K_2) = 1 - F(200; 0{,}2; K_2) < 2\%$

$\Rightarrow 1 - F(200; 0{,}2; K_2) < 0{,}02 \quad | -0{,}02 + F(200; 0{,}2; K_2)$

$0{,}98 < F(200; 0{,}2; K_2)$

$F(200; 0{,}2; 52) \approx 0{,}9843 \Rightarrow K_2 = 52$

$F(200; 0{,}2; 51) \approx 0{,}9764$

D.h. Hr. Staidl hat dann eine entsprechend niedrige Irrtumswahrscheinl., wenn er erst ~~H_0~~ dann H_1 annimmt, wenn weniger als 29 gr. und mehr als 52 gr. Rosinen in der Verpackung sind. Z6

4. Grundlagen Exponentialfunktionen

a) (1) $f'(x) = -2 \cdot e^{x}$ D1

(2) $f'(x) = e^{2x^2 - x} \cdot (4x - 1)$ D1,5

(3) $f'(x) = \cos(x) \cdot e^{-x^3} + \sin(x) \cdot e^{-x^3} \cdot (-3x^2)$ Z1

4.) (Fortsetzung)

b) (1) $e^x = 100 \quad | \ln()$ (1) D1

$x = \ln(100) \approx 4{,}605$ (2) D2

(2) $e^{2x+3} = 50 \quad | \ln()$ (3) D2

$2x+3 = \ln(50) \quad | -3 \quad | :2$ (4) Z2

$x = \frac{1}{2}\ln(50) - \frac{3}{2} \approx 0{,}456$

(3) $-2\cdot e^{-3x} + 9 = -50 \quad | -9$

$-2\cdot e^{-3x} = -59 \quad | :(-2)$

$e^{-3x} = 29{,}5 \quad | \ln()$

$-3x = \ln(29{,}5) \quad | :(-3)$

$x = -\frac{1}{3}\cdot\ln(29{,}5) \approx -1{,}128$

(4) $e^{-3x+2} = 3\cdot e^{-4x} \quad | :e^{-4x}$

$\frac{e^{-3x+2}}{e^{-4x}} = 3 \quad | T$

$e^{-3x+2+4x} = 3 \quad | \ln$

$x+2 = \ln(3) \quad | -2$

$x = \ln(3) - 2 \approx -0{,}901$

c) $f(x) = 5\cdot 3^x = 5\cdot\left(e^{\ln(3)}\right)^x = 5\cdot e^{\ln(3)\cdot x}$

$\Rightarrow b = 5$ und $d = \ln(3) \approx 1{,}0986$ Z1

d) $\int e^{-2x+4}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+4} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ D1,5

5.) Anwendungsaufgabe Exponentialfunktionen

a) $f(x) = (x-2)\cdot e^x$ (Ableitung durch Produktregel)

$f'(x) = 1\cdot e^x + (x-2)\cdot e^x = 1\cdot e^x + x\cdot e^x - 2\cdot e^x = x\cdot e^x - 1\cdot e^x$ [+1]

$= (x-1)\cdot e^x$ [+1] D2

$f''(x) = 1\cdot e^x + (x-1)\cdot e^x = 1\cdot e^x + x\cdot e^x - 1\cdot e^x = x\cdot e^x$ [+1] [+1] D2

$F'(x) = 1\cdot e^x + (x-3)\cdot e^x = 1\cdot e^x + x\cdot e^x - 3\cdot e^x = x\cdot e^x - 2\cdot e^x$ [+1]

$= (x-2)\cdot e^x$ [+1] D2

b) → Be der Nullstelle

$f(x) = 0$

$\underbrace{(x-2)}_{x=2}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{wird nie Null!}} = 0$ D2

→ Berechnung der Fläche [+1] [+1]

$A = \left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| = |F(2) - F(0)| = |(2-3)\cdot e^2 - (0-3)e^0| = |-4{,}389| = 4{,}389\ km^2$ [+1] [+0,5]

$= 4\,389\,000\ m^2$ D4,5/3

5.b) (Fortsetzung)

Kosten $= 4\,389\,000\,m^2 \cdot 0{,}8\,€/m^2 = 3\,511\,200\ €$ Z1

c) $f'(x) = 0$ [+0,5] $\quad f''(1) = 1\cdot e^1 > 0 \Rightarrow$ Minimum [+0,5]

$\underbrace{(x-1)}_{x=1}\cdot e^x = 0$ [+1]

$f(1) = (1-2)\cdot e^1 \approx -2{,}718$ [+1]

D.h. die Position des Minimums ist $Min(1|-2{,}718)$. D3

d1) → Berechnung der Position der Brücke über den Bach:

$f(-2) = (-2-2)\cdot e^{-2} \approx -0{,}541 \quad \Rightarrow P(-2|-0{,}541)$ [+1]

→ Berechnung der Normalen durch P: $g(x) = m\cdot x + b$

Tangentensteigung: $m_T = f'(-2) = (-2-1)\cdot e^{-2} \approx -0{,}406$ [+1]

Normalensteigung: $m\cdot m_T = -1 \quad | :m_T$ [+1]

$\Rightarrow m = -1 : m_T \approx 2{,}463 \quad \Rightarrow g(x) = 2{,}463\cdot x + b$

$P(-2|-0{,}541) \Rightarrow g(-2) = -0{,}541 \Rightarrow 2{,}463\cdot(-2) + b = -0{,}541 \quad | +2\cdot 2{,}463$

$b = 4{,}385$ [+1]

$\Rightarrow g(x) = 2{,}463\cdot x + 4{,}385$

→ Berechnung des Schnittpunktes mit der y-Achse:

$g(0) = 2{,}463\cdot 0 + 4{,}385 = 4{,}385 \quad \Rightarrow P_y(0|4{,}385)$ [+1]

→ Berechnung des Schnittpunktes mit der x-Achse:

$0 = 2{,}463\cdot x + 4{,}385 \quad | -4{,}385 \quad | :2{,}463$ Z1

$\Rightarrow x = -1{,}780 \qquad \Rightarrow P_x(-1{,}780|0)$ [+1,5] E5,5

d2) → Der Fußgängerweg geht also vom Punkt $P(x|f(x))$ zum Punkt $Q(0|0)$

→ Steigung der Geraden $g(x) = m\cdot x + b$:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{(x-2)\cdot e^x - 0}{x - 0} = \frac{(x-2)\cdot e^x}{x}$ [+1]

→ Steigung der Geraden entspricht auch der Tangentensteigung $f'(x)$

$m = f'(x) = (x-1)\cdot e^x$ [+1]

d.2) (Fortsetzung)

→ Es folgt die Gleichung

$$\frac{(x-2)\cdot e^x}{x} = (x-1)\cdot e^x \qquad |:e^x \quad |\cdot x$$ +2

$$x-2 = (x-1)\cdot x \qquad |T \quad |-x+2$$

$$0 = x^2-2x+2 \qquad |PQ$$ +1

$$x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2-2} = 1 \pm \sqrt{-1}$$ ↯ Wurzel aus negativer Zahl +1,5

⇒ Dem Wunsch des Gemeindevorstands kann leider nicht nachgekommen werden. Σ6,5

Σ 6,5

Notenschlüssel:

Note:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
min. %	0	20	27	34	41	46	51	56	61	66	71	76	81	86	91	96
	0	13,5	18	23	27,5	31	34	37,5	41	44	47,5	51	54	57,5	61	64