1. Orientierte Flächeninhalte

(1) Die Fläche oberhalb der x-Achse ist deutlich größer, als die Fläche unterhalb der x-Achse. Beim Integral wird die Fläche oberhalb der x-Achse positiv, die Fläche unterhalb der x-Achse negativ gerechnet. Somit ist in diesem Fall $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. D1 D1 D1

(2), (3) Beide Funktionen sind punktsymmetrisch und die Integrationsgrenzen sind vom Symmetriezentrum gleich weit entfernt. Da jenes auf der x-Achse liegt, ist die Fläche unter der x-Achse gleich der Fläche oberhalb der x-Achse. Damit heben sich die orientierten Flächen in der Summe auf und das Integral ist gleich Null. D1 D1

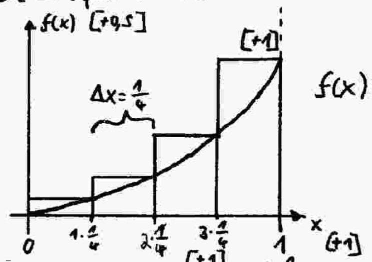
(4) Die Fläche unter der x-Achse ist doppelt so groß, wie die Fläche über der x-Achse. Damit ist die Summe der orientierten Flächeninhalte negativ D1

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < 0$$ D1

Σ 7

2. Die Streifenmethode

a)



$f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^2$ D 3,5

b) [+1] [+1] [+1]

$$O_4 = \frac{1}{4}\cdot f(1\cdot\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{4}\cdot f(2\cdot\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{4}\cdot f(3\cdot\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{4}\cdot f(4\cdot\tfrac{1}{4}) = \frac{15}{64}$$ [+1] D6

$$U_4 = \frac{1}{4}\cdot f(0\cdot\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{4}\cdot f(1\cdot\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{4}\cdot(2\cdot\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{4}\cdot f(3\cdot\tfrac{1}{4}) = \frac{7}{64}$$ [+1]

c) [+1] [+1] [+1] [+1]

$$O_n = \frac{b}{n}\cdot f(1\cdot\tfrac{b}{n}) + \frac{b}{n}\cdot f(2\cdot\tfrac{b}{n}) + \ldots + \frac{b}{n}\cdot f(n\cdot\tfrac{b}{n})$$

$$= \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1\cdot\tfrac{b}{n})^2 + \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2\cdot\tfrac{b}{n})^2 + \ldots + \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(n\cdot\tfrac{b}{n})^2$$ [+1]

$$= \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\tfrac{b}{n})^2 + \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot(\tfrac{b}{n})^2 + \ldots + \frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot n^2\cdot(\tfrac{b}{n})^2$$ [+1]

$$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right]$$ → Summenformel anwenden [+1]

$$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\right]$$ → ausmultiplizieren

$$= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot n^3 + \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{6}\cdot n\right]$$ [+1]

c) (Fortsetzung)

$$O_n = \frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{4}\frac{b^3}{n} + \frac{1}{12}\cdot\frac{b^3}{n^2}$$ [+1] D5 Z 4

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}b^3 + \underbrace{\frac{1}{4}\frac{b^3}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot\frac{b^3}{n^2}}_{\to 0}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}b^3}}$$ [+1]

Σ 18,5

3. Streifenmethode - Extended Edition $f(x) = 2\cdot x^2 - x$

a) [+1] [+1] [+1]

$$O_4 = \frac{5}{4}\cdot f(5+1\cdot\tfrac{5}{4}) + \frac{5}{4}\cdot f(5+2\cdot\tfrac{5}{4}) + \frac{5}{4}\cdot f(5+3\cdot\tfrac{5}{4}) + \frac{5}{4}\cdot f(5+4\cdot\tfrac{5}{4})$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\left(2\cdot(5+1\cdot\tfrac{5}{4})^2 - (5+1\cdot\tfrac{5}{4})\right) + \ldots + \frac{5}{4}\cdot\left(2\cdot(5+4\cdot\tfrac{5}{4})^2 - (5+4\cdot\tfrac{5}{4})\right)$$ E 4

$$= \frac{10225}{16} \approx 639{,}06.$$ [+1]

b)

$$O_n = \frac{b}{n}\cdot f(1\cdot\tfrac{b}{n}) + \frac{b}{n}\cdot f(2\cdot\tfrac{b}{n}) + \ldots + \frac{b}{n}\cdot f(n\cdot\tfrac{b}{n})$$ [+1]

$$= \frac{b}{n}\cdot\left(2\cdot(1\cdot\tfrac{b}{n})^2 - 1\cdot\tfrac{b}{n}\right) + \frac{b}{n}\cdot\left(2\cdot(2\cdot\tfrac{b}{n})^2 - 2\cdot\tfrac{b}{n}\right) + \ldots + \frac{b}{n}\cdot\left(2\cdot(n\cdot\tfrac{b}{n})^2 - n\cdot\tfrac{b}{n}\right)$$ [+1]

$$= \frac{b}{n}\cdot 2\cdot 1^2\cdot\frac{b^2}{n^2} - \frac{b}{n}\cdot 1\cdot\frac{b}{n} + \frac{b}{n}\cdot 2\cdot 2^2\cdot\frac{b^2}{n^2} - \frac{b}{n}\cdot 2\cdot\frac{b}{n} + \ldots + \frac{b}{n}\cdot 2\cdot n^2\cdot\frac{b^2}{n^2} - \frac{b}{n}\cdot n\cdot\frac{b}{n}$$

→ Umsortieren

$$= \frac{b^3}{n^3}\cdot 2\cdot 1^2 + \frac{b^3}{n^3}\cdot 2\cdot 2^2 + \ldots + \frac{b^3}{n^3}\cdot 2\cdot n^2 - \frac{b^2}{n^2}\cdot 1 - \frac{b^2}{n^2}\cdot 2 - \ldots - \frac{b^2}{n^2}\cdot n$$ [+1]

$$= \frac{b^3}{n^3}\cdot 2\cdot\left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right] - \frac{b^2}{n^2}\cdot\left[1+2+\ldots+n\right]$$ [+1]

$$= \frac{b^3}{n^3}\cdot 2\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\right] - \frac{b^2}{n^2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\right]$$

$$= \frac{b^3}{n^3}\cdot 2\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot n^3 + \frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{6}\cdot n\right] - \frac{b^2}{n^2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot n^2 + \frac{1}{2}\cdot n\right]$$ [+1]

$$= \frac{2}{3}\cdot b^3 + \frac{b^3}{n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{n^2} - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot b^3 + \underbrace{\frac{b^3}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{n^2}}_{\to 0} - \frac{1}{2}\cdot b^2 - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{n}}_{\to 0}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}b^3 - \frac{1}{2}b^2}}$$ [+1] Z2 E4

Σ 10

4.| Stammfunktionen bilden

a) $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{9}x^3 + x$ — a) D2

b) $f(x) = \frac{3}{x^5} = 3 \cdot x^{-5} \Rightarrow F(x) = -\frac{3}{4} \cdot x^{-4}$ — b) D2

c) $f(x) = 8 \cdot \sqrt{x} = 8 \cdot x^{1/2} \Rightarrow F(x) = \frac{16}{3} \cdot x^{3/2}$ — c) D2

d) $F(x) = \frac{20}{3} \cdot x^{3/4}$ — d) D1

e) $F(x) = \frac{1}{n^2} \cdot x^n$ — e) Z1

f) $F(x) = \cos(x)$ — f) D1

g) $F(x) = -3x$ — g) D0,5

h) $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-2}$ — h) D1

$\Sigma 11,5$

5.| Fläche berechnen

a) $\int_2^5 (\frac{1}{2} \cdot x^3 + 2)\,dx = [\frac{1}{8}x^4 + 2x]_2^5 = \frac{1}{8} \cdot 5^4 + 2 \cdot 5 - (\frac{1}{8} \cdot 2^4 + 2 \cdot 2) = \frac{657}{8} \approx \underline{\underline{82,125}}$ [+1] [+1] [+1] [+0,5] D3,5

b) $\int_1^5 (x^3 - 7x^2 + 6x + 25)\,dx = [\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 3x^2 + 25x]_1^5$ [+1] [+1]

$= \frac{116}{3} \approx \underline{\underline{38,67}}$ [+1] D3

c) Untere Integrationsgrenze: $a = 0$ [+1]

Berechnung obere Grenze: $f(b) = 3 \Rightarrow b^2 + 1 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{2} \approx 1,414$ [+1,5]

Fläche unter dem Graphen: $\int_0^{\sqrt{2}} (x^2+1)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 + x]_0^{\sqrt{2}} = \frac{5}{3}\sqrt{2} \approx \underline{\underline{2,36}}$ [+1]

Berechnung der schraffierten Fläche:

$A = 3 \cdot \sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} f(x)\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{2} \approx \underline{\underline{1,89}}$ [+1,5]

Z 2,5
E 2,5
$\Sigma 11,5$

Notenschlüssel:

$\Sigma 58,5$

Note:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
min. %	0	20	27	34	41	46	51	56	61	66	71	76	81	86	91	96
min. Rohp.	0	12	16	20	24	27	30	33	36	39	41,5	44,5	47,5	50,5	53,5	56,5

D 37,5 63,5 %

Z 10,5 18 %

E 10,5 18,5 %