1. Vektoren und Punkte

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Kollinearitäts- und Komplanaritätsprüfung

→ $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind kollinear, da $\vec{c} = -2 \cdot \vec{a}$

→ Komplanaritätsprüfung:

(1) $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \stackrel{?}{=} \vec{c}$ ⇒ Wahr für $r = -2$ und $s = 0$ ⇒ komplanar

(2) $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \stackrel{?}{=} \vec{d}$ ⇒ Wahr für $r = 2$ und $s = 1$ ⇒ komplanar

⇒ Alle vier Vektoren liegen in einer Ebene

---

1. Geraden aus Punkte berechnen

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. Punktprobe

A: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r = -2 \\ \Rightarrow r = -2 \\ \Rightarrow r = -\frac{1}{2} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$ A liegt nicht auf g.

⇒ Falsch! ~~Wahr für r = -2~~

B: $\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r = 3 \\ \Rightarrow r = 3 \\ \Rightarrow r = 3 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$ B liegt auf g.

3. Parallelität und Identität

g_1 und g_2:

→ Parallel? $r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r = -2 \\ \Rightarrow r = -2 \\ \Rightarrow r = -2 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow g_1 \parallel g_2$

→ Identisch? $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r_2 = (+1) \\ \Rightarrow r_2 = +1 \\ \Rightarrow r_2 = -1 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow g_1 \neq g_2$

g_1 und g_3:

→ Parallel? $r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r = -4 \\ \Rightarrow r = -4 \\ \Rightarrow r = -3 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow g_1 \nparallel g_3$

g_2 und g_3 sind somit ebenfalls nicht parallel zueinander.

g_1 und g_4:

→ Parallel? $r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 6 \\ 4,5 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r = -3 \\ \Rightarrow r = -3 \\ \Rightarrow r = -3 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow g_1 \parallel g_3$

→ Identisch? $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r_1 = 0 \\ \Rightarrow r_1 \neq 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow g_1 \neq g_3$

g_2 und g_4:

→ sind parallel, da $g_1 \parallel g_4$

→ Identisch? $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow r_2 = 1 \\ \Rightarrow r_2 = -\frac{2}{3} \end{matrix} \Big\} \Rightarrow g_2 \neq g_4$

g_3 und g_4:

→ $g_3 \nparallel g_4$, da $g_3 \nparallel g_1$ und $g_1 \parallel g_4$

Q2 Ma | Lösungen zu den Grundlagenaufgaben zu Punkten, Vektoren und Geraden 11.04.

g_1 und g_2:

$$g_1 = g_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\-4\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}I\\II\\III\end{matrix}$$

Resultierendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} I.&: -3 + r_1 \cdot 6 = 3 + r_2 \cdot (-3) \\ II.&: 1 + r_1 \cdot 2 = 3 + r_2 \cdot (-1) \\ III.&: 4 + r_1 \cdot (-4) = -1 + r_2 \cdot 2 \end{aligned}\right| \xrightarrow{\text{umformen}} \begin{aligned} I.&: 6r_1 + 3r_2 = 6 \mid \\ II.&: 2r_1 + r_2 = 2 \mid 3 \cdot II + I \cdot (-1) \\ III.&: -4r_1 - 2r_2 = -5 \mid 3 \cdot III + 2 \cdot I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I.&: 6r_1 + 3r_2 = 6 \\ II&: 0 = 0 \\ III.&: 0 = -3 \end{aligned} \quad ↯ \Rightarrow \text{Geraden haben keinen Schnittpunkt!}$$

$$\rightarrow \text{Parallel?} \quad r \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} &\Rightarrow r = -\tfrac{1}{2} \\ &\Rightarrow r = -\tfrac{1}{2} \\ &\Rightarrow r = -1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_1 \parallel g_2 \Rightarrow \underline{\text{nicht}} \text{ windschief.}$$

g_1 und g_3:

$g_1 = g_3 \longrightarrow$ mit Gauß nach r_1 und r_3 auflösen.

Ergebnis: $r_1 = -\frac{1}{2}$ und $r_3 = -2$

• Schnittpunkt durch Einsetzen bestimmen:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix} \Rightarrow S(-6|0|6)$$

g_2 und g_3:

$g_2 = g_3 \longrightarrow$ mit Gauß nach r_2 oder r_3 umstellen $\Rightarrow$ Widerspruch!
$\Rightarrow$ kein Schnittpunkt!

$$\rightarrow \text{Parallel?} \quad r \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} &\Rightarrow r = \tfrac{2}{3} \\ &\Rightarrow r = -1 \end{aligned}\right\} ↯$$

$\Rightarrow g_2$ und g_3 sind nicht parallel und haben auch keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Damit sind sie windschief.

β