

1. Vektoren und Punkte

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Kollinearitäts- und Komplinaritätsprüfung

$\rightarrow \vec{a}$ und \vec{c} sind kollinear, da $\vec{c} = -2 \cdot \vec{a}$

\rightarrow Komplinaritätsprüfung:

(1) $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} \stackrel{?}{=} \vec{c} \Rightarrow$ Wahr, für $r = -2$ und $s = 0 \Rightarrow$ komplinar

(2) $r \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b} \stackrel{?}{=} \vec{d} \Rightarrow$ Wahr, für $r = 2$ und $t = 1 \Rightarrow$ komplinar

\rightarrow Alle vier Vektoren liegen in einer Ebene

1. Geraden aus Punkte berechnen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. Punktprobe

A: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r = -2 \\ r = -2 \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A \text{ liegt nicht auf } g.$
 Falsch!
 \Rightarrow Wahr für kein

B: $\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r = 3 \\ r = 3 \\ r = 3 \end{cases} \Rightarrow B \text{ liegt auf } g.$

3. Parallelität und Ideenförmigkeit

g_1 und g_2 :

$$\rightarrow \text{Parallel? } r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r = -2 \\ r = -2 \\ r = -2 \end{cases} \Rightarrow g_1 \parallel g_2$$

$$\rightarrow \text{Identisch? } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = (+1) \\ r_2 = +1 \\ r_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow g_1 \neq g_2$$

g_1 und g_3 :

$$\rightarrow \text{Parallel? } r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r = -4 \\ r = -4 \\ r = -3 \end{cases} \Rightarrow g_1 \parallel g_3$$

g_2 und g_3 sind somit ebenfalls nicht parallel zueinander.

g_2 und g_4 :

$$\rightarrow \text{Parallel? } r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4,5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ r = -3 \\ r = -3 \end{cases} \Rightarrow g_2 \parallel g_3$$

$$\rightarrow \text{Identisch? } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_4 = 0 \\ r_4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow g_2 \neq g_3$$

g_3 und g_4 :

\rightarrow sind parallel, da $g_3 \parallel g_4$

$$\rightarrow \text{Identisch? } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r_4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_4 = 1 \\ r_4 = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow g_3 \neq g_4$$

g_3 und g_4 :

$\rightarrow g_3 \parallel g_4$, da $g_3 \parallel g_2$ und $g_2 \parallel g_4$

Q2 Lösungen zu den Grundlagenaufgaben zu Punkten, Vektoren und Geraden M. 098

g_1 und g_2 :

$$g_1 = g_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{L}$$

Resultierendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \text{I.: } -3 + r_1 \cdot 6 = 3 + r_2 \cdot (-3) \\ \text{II.: } 1 + r_1 \cdot 2 = 3 + r_2 \cdot (-1) \\ \text{III.: } 4 + r_1 \cdot (-4) = -1 + r_2 \cdot 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{umformen} \\ \text{II. : } 2r_1 + r_2 = 2 \mid 3 \cdot \text{II} + \text{I}(-1) \\ \text{III.: } -4r_1 - 2r_2 = -5 \mid 3 \cdot \text{III} + 2 \cdot \text{I} \end{array} \right.$$

$$\text{I.: } 6r_1 + 3r_2 = 6$$

$$\text{II.: } 0 = 0$$

$$\text{III.: } 0 = -3$$

$\downarrow \Rightarrow$ Geraden haben keinen Schnittpunkt!

$$\rightarrow \text{parallel? } r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow g_1 \parallel g_2 \\ \Rightarrow \text{winkelwinklig!} \end{array} \right.$$

g_1 und g_3 :

$$g_1 = g_3 \rightarrow \text{mit Gauß nach } r_1 \text{ und } r_3 \text{ auflösen.}$$

$$\text{Ergebnis: } r_1 = -\frac{1}{2} \text{ und } r_3 = -2$$

• Schnittpunkt durch Einsetzen bestimmen:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow s'(-6 | 0 | 6)$$

g_2 und g_3 :

$$g_2 = g_3 \rightarrow \text{mit Gauß nach } r_2 \text{ oder } r_3 \text{ umstellen} \Rightarrow \text{Widerspruch!}$$

$$\rightarrow \text{parallel? } r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{kein Schnittpunkt!} \\ \downarrow \end{array} \right.$$

$\Rightarrow g_2$ und g_3 sind nicht parallel und haben auch keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Damit sind sie winkelwinklig.