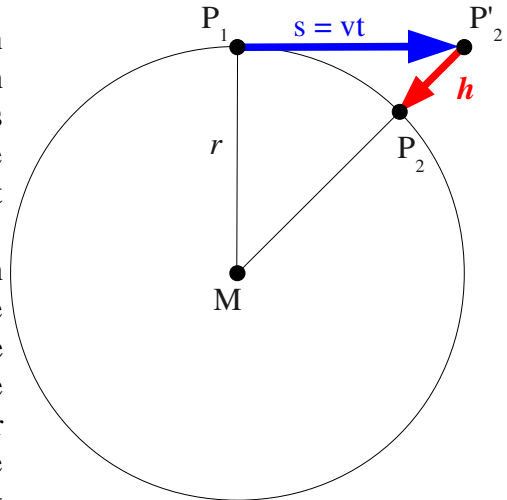


Wie groß ist die Zentripetalkraft?

Für viele Anwendungen (Kettenkarussell, Kurvenfahrten mit dem Auto, maximale Rotationsfrequenz von Compact Discs (CDs), u.s.w.) ist die genaue Kenntnis der Zentripetalkraft wichtig. Wir werden nun eine Formel herleiten, mit der sich die Kraft direkt ausrechnen lässt.

Die Strecke, die ein kreisender Körper in einer kurzen Zeit t zurücklegt, lässt sich aufteilen in eine tangentielle (blau) und eine radiale (rot) Strecke. Die blaue Strecke gibt an, wie sich der Körper bewegen würde, wenn keine Zentripetalkraft auf ihn wirken würde. Mit der Bahngeschwindigkeit v erhalten wir für diese Strecke die Länge $v \cdot t$. Die Zentripetalkraft bewirkt eine Ablenkung in Richtung Zentrum, die mit h dargestellt wird. Die Kraft bewirkt wegen des 2. Newtonschen Gesetzes eine Beschleunigung $a = F/m$. Mit ihr lässt sich die Höhe h über das Weg-Zeit-Gesetz angeben:



$$h = \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

Das Dreieck in obiger Zeichnung ist rechtwinklig. Daher lässt sich der Satz des Pythagoras anwenden:

$$r^2 + v^2 \cdot t^2 = (r + h)^2 \quad (2)$$

Die rechte Seite der Gleichung lässt sich umformen $(r + h)^2 = r^2 + 2 \cdot r \cdot h + h^2 = h \cdot (2r + h) + r^2$, und wir erhalten:

$$r^2 + v^2 \cdot t^2 = h \cdot (2r + h) + r^2 \quad (3)$$

Werden für sehr kurze Zeiten ist h sehr viel kleiner als $2r$. Es ist also $2r + h \approx 2r$ für eine sehr feine Aufteilung der Kreisbewegung in tangentielle (rote) und radiale (blaue) Strecken. Setzen wir dies in die Klammer der rechten Seite ein, erhalten wir

$$r^2 + v^2 \cdot t^2 = h \cdot (2r) + r^2 \quad (4)$$

Die Gleichung lässt sich nach h umstellen, indem r^2 abgezogen und durch $2r$ geteilt wird:

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{r} \right) \cdot t^2 \quad (5)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Gleichung (1), so sieht man, dass für die durch die Zentripetalkraft verursachte Beschleunigung gilt:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Für die Zentripetalkraft folgt wegen $F = m \cdot a$ der wichtige Zusammenhang

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Dies ist die Kraft, die auf einen Körper wirkt, der sich auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt, die Masse m sowie die Bahngeschwindigkeit v besitzt.