Lösungen zum Ü-Blatt „Kurven in Diskussion" 23.04.13 E-Phase

2. Die Kurvendiskussion

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

(1) Symmetrieeigenschaften:

Da die Funktion sowohl gerade als auch ungerade Exponenten besitzt, ist sie weder achsensymm. zur y-Achse noch Punktsymmetrisch zum Ursprung

(2) Nullstellen

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \quad | x \text{ vorklammern}$

$\underbrace{x}_{x_1 = 0} \cdot \underbrace{(x^2 - 6x + 9)} = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad | PQ$

$x_{1,2} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 9} \Rightarrow x_{1,2} = 3$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}, \underline{\underline{x_2 = 3}}$

(3) Extrempunkte

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad | :3$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad | PQ$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

$f''(x_1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 \Rightarrow$ Maximum

$f''(x_2) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 \Rightarrow$ Minimum

$f(x_1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4 \Rightarrow P_{Max}(1|4)$

$f(x_3) = 0 \Rightarrow P_{Min}(3|0)$

(4) Wendepunkte

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \quad | +12$

$6x = 12 \quad | :6$

$x = 2$

$f'''(2) = 6 \Rightarrow$ R-L-Wendepunkt

29.04.13 E-Phase

Lösung zum Ü-Blatt „Kurven in Diskussion"

(4) Fortsetzung: Prüfung, ob Sattelpunkt

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \Rightarrow$ kein Sattelpunkt!

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 2 \Rightarrow WP(2|2)$

(5) ...

3. Kurven diskutieren & interpretieren

$A(t) = -10^6 \cdot \frac{1}{8} t^3 + 10^6 \cdot \frac{6}{8} t^2$

$A'(t) = -10^6 \cdot \frac{3}{8} t^2 + 10^6 \cdot \frac{12}{8} t$

$A''(t) = -10^6 \cdot \frac{6}{8} t + 10^6 \cdot \frac{12}{8}$

$A'''(t) = -10^6 \cdot \frac{6}{8}$

a) (1) keine Symm., da sowohl gerade als auch ungerade Exp. vorhanden.

(2) Nullstellen:

$A(t) = 0 \Rightarrow -10^6 \cdot \frac{1}{8} t^3 + 10^6 \cdot \frac{6}{8} t^2 = 0 \quad | t^2 \text{ vorklammern}$

$\underbrace{t^2}_{} \cdot \underbrace{\left(-10^6 \frac{1}{8} t + 10^6 \cdot \frac{6}{8}\right)} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{t = 0}} \quad -10^6 \frac{1}{8} t + 10^6 \frac{6}{8} = 0 \quad | -10^6 \frac{6}{8} \quad | :\left(-10^6 \frac{1}{8}\right)$

$\Rightarrow \underline{\underline{t = 6}}$

(3) Extrempunkte:

$A'(t) = 0 \Rightarrow -10^6 \frac{3}{8} t^2 + 10^6 \cdot \frac{12}{8} t = 0 \quad | t \text{ vorklammern}$

$\underbrace{t}_{t_1 = 0} \cdot \underbrace{\left(-10^6 \frac{3}{8} t + 10^6 \cdot \frac{12}{8}\right)} = 0$

$-10^6 \frac{3}{8} t + 10^6 \frac{12}{8} = 0 \quad | -10^6 \frac{12}{8} \quad | :\left(-10^6 \frac{3}{8}\right)$

$\Rightarrow \underline{\underline{t_2 = 4}}$

$A''(t_1) = 10^6 \cdot \frac{12}{8} > 0 \Rightarrow$ Minimum

$A''(t_2) = -10^6 \cdot \frac{24}{8} + 10^6 \cdot \frac{12}{8} = -10^6 \cdot \frac{12}{8} < 0 \Rightarrow$ Maximum

Lösung zum U-Blatt „Kurven in Diskussion"

E-Phase

(3) Fortsetzung:

$A(t_1)=0 \Rightarrow P_{Min}(0|0)$

$A(t_2)=4000000 \Rightarrow P_{Max}(4|4000000)$

(4) Wendepunkte

$A''(t)=0 \Rightarrow -10^6\,\frac{6}{8}\cdot t+10^6\,\frac{12}{8}=0 \quad |-10^6\,\frac{12}{8} \quad |:(-10^6\,\frac{6}{8})$

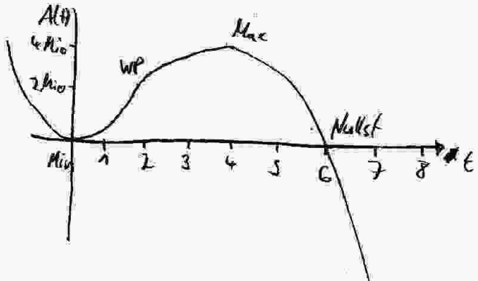
$t=2$

$A'''(2)=-10^6\cdot\frac{6}{8} \Rightarrow$ L-R-Wendepunkt

$A'(2)=\frac{3}{2} \Rightarrow$ kein Sattelpunkt!

$A(2)=2000000 \Rightarrow WP(2|2000000)$

(5)



b) Die Infektion beginnt bei $t=0$, hier sind erst wenige Viren im Körper, die sich aber schlagartig vermehren. Der Zuwachs nimmt ab dem WP nach 2 Tagen ab – ab hier greift die Immunabwehr des Körpers.

Der Höhepunkt der Krankheit ist beim Maximum am Tag 4 erreicht. Die Genesung wird danach spürbar.

6 Tage nach der Infektion ist die Erkrankung besiegt & keine Viren mehr im Körper.

Lösungen „Kurven in Diskussion" Aufg. 4

4. a) $f(x)=x^3+1,5x^2-2,25x \quad f'(x)=3x^2+3x-2,25 \quad f''(x)=6x+3$

(1) Keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten $\quad f'''(x)=6$

(2) Nullstellen: $f(x)=0 \quad \boxed{x_1=0}$

$0=x^3+1,5x^2-2,25x=x\cdot(\underbrace{x^2+1,5x-2,25})$

$x^2+1,5x-2,25=0 \quad |PQ$

$\Rightarrow \boxed{x_1\approx 0,93} \; \boxed{x_2=-2,43}$

(3) $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+3x-2,25=0 \quad |:3$

$x^2+x-\frac{3}{4}=0 \quad |PQ \Rightarrow x_1=\frac{1}{2} \quad x_2=-\frac{3}{2}$

$x_1: f''(\frac{1}{2})=3+3=\underline{6} \Rightarrow$ Minimum $f(x_1)=-0,625 \Rightarrow \boxed{P_{Min}(\frac{1}{2}|-\frac{5}{8})}$

$x_2: f''(-\frac{3}{2})=-9+3=-6 \Rightarrow$ Maximum $f(x_2)=3,375 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(-\frac{3}{2}|3,375)}$

(4) Wendepunkte $\qquad$ (5) Nö

$f''(x)=6x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$f'''(-\frac{1}{2})=6>0 \Rightarrow$ R-L-WP $\quad f'(-\frac{1}{2})=-3 \Rightarrow$ kein Sattelpunkt!

$f(-\frac{1}{2})=1,375 \Rightarrow \boxed{WP(-\frac{1}{2}|1,375)}$

4.b) $f(x)=x^3+x^2-x \quad f'(x)=3x^2+2x-1 \quad f''(x)=6x+2 \quad f'''(x)=6$

(1) Keine Symmetrie: Sowohl gerade als auch ungerade Exponenten

(2) $f(x)=0 \Rightarrow x^3+x^2-x=0 \Rightarrow x\cdot(\underbrace{x^2+x-1})=0$

$x_1=0 \quad x^2+x-1=0 \quad |PQ$

$\Rightarrow \boxed{x_{1,2}\approx 0,618} \; \boxed{x_2\approx -1,618}$

(3) $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+2x-1=0 \quad |:3$

$x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0 \quad |PQ \Rightarrow x_1=\frac{1}{3} \quad x_2=-1$

$x_1: f''(x_1)=4 \Rightarrow$ Minimum $\Rightarrow f(x_1)=-\frac{5}{27} \Rightarrow \boxed{P_{Min}(\frac{1}{3}|-\frac{5}{27})}$

$x_2: f''(x_2)=-4 \Rightarrow$ Maximum $\Rightarrow f(x_2)=1 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(-1|1)}$

Lösungen „Kurven in Diskussion"

4.b) Fortsetzung

(4) Wendepunkte

4.) $f''(x)=0 \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$f'''(-\frac{1}{3})=6>0 \Rightarrow$ R-L-WP $\quad f'(-\frac{1}{3})\neq 0 \Rightarrow$ kein Sattelpunkt!

$f(-\frac{1}{3})=\frac{11}{27} \Rightarrow \boxed{WP(-\frac{1}{3}|\frac{11}{27})}$

E Ma Lösungen von „Kurven in Diskussion"

5. Kurvenscharen

$f_a(x) = x^2 - ax \quad f_a'(x) = 2x-a \quad f_a''(x)=2 \quad f_a'''(x)=0$

a) (1) Symmetrie: Achsensymmetr. für $a=0$, sonst keine Symmetrie

(2) Nullstellen:

$f_a(x)=0 \Rightarrow x^2 \underbrace{-a}_{p}x \underset{q=0}{=} 0 \quad |pq$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}-0} = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = a$

(3) Extremstellen/-punkte

$f_a'(x)=0 \Rightarrow 2x-a=0 \quad |+a \,|:2$

$x_E = \frac{a}{2}$

$f_a''(x_E)=2 \Rightarrow$ Min $\quad f(x_E) = (\frac{a}{2})^2 - a\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{4} \Rightarrow P_{Min}(\frac{a}{2}|-\frac{a^2}{4})$

(4) Wendepunkte: keine vorhanden, da $f_a''(x)=2\neq 0$

b) $a=-1{,}5$: Nullstellen bei $x_1=0$ und $x_2=-1{,}5$

Extrempunkt bei $x_E=-0{,}75 \quad f(x_E)=-\frac{2{,}25}{4}$

u.s.w.

c) nö

6. Kurven aus Kurvenscharen bestimmen!

$f_a(x) = x^2-2ax+1 \quad f_a'(x) = 2x-2a \quad f_a''(x)\ 2$

a) (1) ~~Punkt~~ Achsensymm. für $a=0$, sonst keine Symmetrie

(2) Nullstellen

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 \underbrace{-2a}_{p}x \underbrace{+1}_{q} = 0 \quad |PQ$

$\Rightarrow \boxed{x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2-1}}$

(3) Extrempunkte

$f_a'(x)=0 \Rightarrow 2x-2a=0 \quad |+2a\,|:2$

$x=a$

I

$f_a''(a)=2>0 \Rightarrow$ Minimum $\quad f(a)=(a)^2-2a\cdot a+1=-a^2+1 \Rightarrow \boxed{P_{Min}(a|-a^2+1)}$

E Ma Lösungen zu „Kurven in Diskussion"

(4) Wendepunkte keine vorhanden, da $f_a''(x)=2$

b) nö

c) $f_a'(x) = 2x - 2a$ gibt die Steigung an d. Stelle x an.

$f_a'(4) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot a \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow 8 = 1 + 2a \quad | -1 \quad | :2$

$\Rightarrow \underline{\underline{a = 3,5}}$

d) $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1} \Rightarrow$ Es gibt nur eine Nullstelle, wenn die Wurzel Null wird.

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \quad | +1 \\ a^2 = 1 \quad | \sqrt{} \\ \Rightarrow a_1 = 1 \text{ und } a_2 = -1 \end{array}\right\}$ Für $a = 1$ und $a = -1$ gibt es nur eine Nullstelle.

Keine Nullstelle, wenn unter der Wurzel was Negatives steht:

$a^2 - 1 < 0 \quad | +1$

$a^2 < 1 \quad | \sqrt{}$

$\underline{a < 1}$ Wegen des Quadrates aber auch: $a > -1$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Nullstelle, wenn $\boxed{-1 < a < 1}$

7. $f_a(x) = 2a \cdot x^3 + (2 - 4a) \cdot x$

a) $a = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x \quad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3 \quad f''(x) = -3x \quad f'''(x) = -3$

(1) Punktsymmetrisch

(2) $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^3 + 3x = 0 \quad |$ x vorklammern

$x \cdot (-\frac{1}{2}x^2 + 3) = 0$

$\underline{\underline{x_1 = 0}} \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3 = 0 \quad | -3 \quad | \cdot (-2)$

$x^2 = 6 \quad | \sqrt{}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \sqrt{6}}}, \underline{\underline{x_3 = -\sqrt{6}}}$

(3) $f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 3 = 0 \quad | -3 \quad | \cdot (-\frac{2}{3})$

$x^2 = 2 \quad | \sqrt{}$

$\Rightarrow x_{E1} = \sqrt{2} \quad x_{E2} = -\sqrt{2}$

x_{E1}: $f''(x_{E1}) = -3 \cdot \sqrt{2} < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f(x_{E1}) = -\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^3 + 3 \cdot \sqrt{2} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P_{Max}(\sqrt{2} \mid 2 \cdot \sqrt{2})}$

x_{E2}: $f''(x_{E2}) = -3 \cdot (-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ Minimum

$f(x_{E2}) = -\frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{2})^3 + 3 \cdot (-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P_{Min}(-\sqrt{2} \mid -2 \cdot \sqrt{2})}$

(4) $f''(x_W) = 0 \Rightarrow -3x_W = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_W = 0}}$

$f'''(x_W) = -3 \neq 0 \Rightarrow$ L-R-Wendepunkt

$f(x_W) = 0 \Rightarrow \boxed{WP(0 \mid 0)}$

(5) Zeichnung fehlt.

---

b) $f_a(x) = 2ax^3 + (2 - 4a) \cdot x$

$\Rightarrow f_a(\sqrt{2}) = 2 \cdot a \cdot (\sqrt{2})^3 + (2 - 4a) \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot a \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Jede Funktion gehen durch den Punkt $P(\sqrt{2} \mid 2\sqrt{2})$

c) $f_a'(x) = 6ax^2 + 2 - 4a$

$f_a'(\sqrt{2}) \stackrel{!}{=} 6 \Rightarrow 6a \cdot (\sqrt{2})^2 + 2 - 4a = 6 \quad | T$

$8a + 2 = 6 \quad | -2$

$8a = 4 \quad | :8$

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$

7. d) $f_a'(x) = 6ax^2 + 2 - 4a$

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow \quad 6ax^2 + 2 - 4a = 0 \quad | +4a-2$

$6ax^2 = 4a - 2 \quad | :6a$

$x^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6a} \quad | \sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3} - \frac{1}{6a}}$

$\Rightarrow$ Es gibt genau dann keine Extrema, wenn der Radikant negativ ist.

$\frac{2}{3} - \frac{1}{6a} < 0 \quad | + \frac{1}{6a}$

$\frac{2}{3} < \frac{1}{6a} \quad | \cdot a \cdot \frac{3}{2}$

$\boxed{a < \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow$ Für $a < \frac{1}{4}$ hat keine Funktion der Schar Extremstellen.