Ella: Lösungen zum Übungsblatt „Extremwertaufgaben" 20.05.13

20. I. Hauptbedingung: l = Länge b = Breite h = Höhe der Schachtel

$V(l,b,h) = l \cdot b \cdot h$

II. Nebenbedingungen:

$l = 42-2x$, $b = 30-2x$, $h = x$

III. Zielfunktion:

$V(x) = [(42-2x)\cdot(30-2x)]\cdot x = [1260 - 84x - 60x + 4x^2]\cdot x$

$\Rightarrow V(x) = 4x^3 - 144x^2 + 1260x$

IV. Extremalrechnung:

$V'(x) = 12x^2 - 288x + 1260 \qquad V'(x) = 0$

$\Rightarrow 0 = 12x^2 - 288x + 1260 \quad |:12 \quad |PQ$

$\Rightarrow x_1 = 18{,}245 \qquad x_2 = 5{,}755$

$V''(x) = 24x - 288 \quad \Rightarrow V(x_1) = 149{,}88 \qquad V(x_2) = -149{,}88$

$\Rightarrow$ Das Maximum liegt bei $x_2 = 5{,}755$

A.: Die Seitenlänge der Quadrate muss 5,755 cm betragen, damit das Volumen der Schachtel maximal wird.

---

21. I. Hauptbedingung:

$A(x,y) = x \cdot y$

II. Nebenbedingung:

$160\,000 = (2x+2y)\cdot 900 + (2y+x)\cdot 200$

$160000 = 1800x + 1800y + 400y + 200x$

$\boxed{160000 = 2000x + 2200y}$

III. Zielfunktion

$2200y = 160\,000 - 2000x \quad |:2200$

$y = \frac{800}{11} - \frac{10}{11}x$

$\Rightarrow A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(\frac{800}{11} - \frac{10}{11} \cdot x\right)$

$\Rightarrow A(x) = -\frac{10}{11}x^2 + \frac{800}{11} \cdot x$

IV. Extremalrechnung

$A'(x) = -\frac{20}{11} \cdot x + \frac{800}{11} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow 0 = -\frac{20}{11}x + \frac{800}{11} \quad |\cdot 11 \quad |-800 \quad |:(-20)$

$\Rightarrow \underline{x = 40\,m}$

$\Rightarrow y = \frac{800}{11} - \frac{10}{11} \cdot x = \frac{400}{11} \approx \underline{\underline{36{,}36\,m}}$

1

Ella: Lösungen zum Übungsblatt „Extremwertaufgaben" 20.05.13

22. I. Hauptbedingung:

$S(a,b) = a + b$

II. Nebenbedingung:

$100 = a \cdot b \quad |:a$

III. Zielfunktion

$b = \frac{100}{a}$

$\Rightarrow S(a) = a + \frac{100}{a}$

IV. Extremalrechnung

$S'(a) = 1 - 100 \cdot a^{-2}$

$\Rightarrow 0 = 1 - 100 \cdot a^{-2} \quad |+100a^{-2}$

$100a^{-2} = 1$

$100 = a^2 \quad |\sqrt{\ }$

$\underline{\underline{10 = a}}$ (−10 kommt nicht in Frage, da natürliche Zahl gesucht)

$\Rightarrow b = \frac{100}{a} = \underline{\underline{10}}$

---

23. a) I. Hauptbed.:

$A(a,b) = a \cdot b$

II. Nebenbedingungen:

$a = 4 - x$

$b = 2 - f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

III. Zielfunktion:

$A(x) = (4-x)\cdot\left(2 - \frac{1}{x}\right)$

$= 8 - \frac{4}{x} - 2x + 1$

$\Rightarrow A(x) = -2x - \frac{4}{x} + 9$

$= -2x - 4 \cdot x^{-1} + 9$

IV. Extremalrechnung

$A'(x) = -2 + 4 \cdot x^{-2} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow 0 = -2 + 4x^{-2} \quad |+2$

$2 = 4x^{-2} \quad |\cdot x^2$

$2x^2 = 4 \quad |:2$

$x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}$ ($x = -\sqrt{2}$ kommt nicht in Frage)

$\Rightarrow a = 4 - \sqrt{2} \approx \underline{2{,}59}$

$b = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \underline{\underline{1{,}29}}$

---

23. b) I. Hauptbedingung:

$U(a,b) = 2a + 2b$

II Nebenbedingungen:

$a = 4 - x$

$b = 2 - f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

III. Zielfunktion:

$U(x) = 2(4-x) + 2\left(2 - \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow U(x) = 8 - 2x + 4 - 2x^{-1}$

IV Extremalrechnung

$U'(x) = -2 + 2x^{-2} \stackrel{!}{=} 0$

$0 = -2 + 2x^{-2} \quad |+2$

$2 = 2x^{-2} \quad |\cdot x^2$

$2x^2 = 2 \quad |:2$

$\Rightarrow x^2 = 1 \quad |\sqrt{\ }$ ($x = -\sqrt{1}$ kommt nicht in Frage)

$\Rightarrow x = \sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow a = 4 - 1 = \underline{\underline{3}}$

$b = 2 - \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$

---

24. I. Hauptbedingung:

$V(r,h) = \pi r^2 \cdot h$

II. Nebenbed.:

$1200 = \pi r^2 + 2\pi r h \quad |-\pi r^2$

$1200 - \pi r^2 = 2\pi r h \quad |:(2\pi r)$

$\frac{1200}{2\pi r} - \frac{1}{2} \cdot r = h$

III Zielfunktion:

$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \left(\frac{1200}{2\pi r} - \frac{1}{2}r\right)$

$\Rightarrow V(r) = 600r - \frac{\pi}{2}r^3$

IV Extremalrechnung:

$V'(r) = -\frac{3\pi}{2}r^2 + 600 \stackrel{!}{=} 0$

$0 = -\frac{3\pi}{2}r^2 + 600 \quad |+\frac{3\pi}{2} \cdot r^2$

$\frac{3\pi}{2}r^2 = 600 \quad |\cdot \frac{2}{3\pi}$

$r^2 = \frac{400}{\pi} \quad |\sqrt{\ }$

$\Rightarrow r = \frac{20}{\sqrt{\pi}} \approx \underline{\underline{11{,}284\,cm}}$

$\Rightarrow h \approx \frac{1200}{2\pi \cdot 11{,}284} - \frac{1}{2} \cdot 11{,}284$

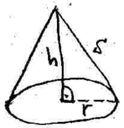
$= \underline{\underline{11{,}284\,cm}}$

2

30.a)

I Hauptbedingung:

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$



II. Nebenbedingung: $s = 40\,cm$

$$40^2 = r^2 + h^2 \quad |-h^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 40^2 - h^2$$

III Zielfunktion

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\,(40^2 - h^2)\cdot h$$
$$= \frac{1}{3}\pi\, 1600\, h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

IV Extremalrechnung

$$V'(h) = -\pi h^2 + \frac{1}{3}\pi\, 1600 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\pi h^2 + \frac{1}{3}\pi\, 1600 \quad |+\pi h^2$$

$$\pi h^2 = \frac{1}{3}\pi\, 1600 \quad |:\pi$$

$$h^2 = \frac{1600}{3} \quad |\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{1600}{3}} \approx \underline{23{,}09\,cm}$$

$$r = \sqrt{40^2 - \frac{1600}{3}} \approx \underline{\underline{32{,}66\,cm}}$$

30.b) I. Hauptbed.:

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

II. Nebenbed.:

$$s^2 = r^2 + h^2 \quad |-h^2$$

$$\Rightarrow r^2 = s^2 - h^2$$

III Zielfunktion

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\,(s^2 - h^2)\cdot h$$
$$= \frac{1}{3}\pi s^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3$$

IV Extremalrechnung

$$V'(h) = -\pi h^2 + \frac{1}{3}\pi s^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\pi h^2 = \frac{1}{3}\pi s^2 \quad |:\pi \quad |\sqrt{\ }$$

$$\underline{\underline{h = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, s}}$$

$$r = \sqrt{s^2 - \tfrac{1}{3}s^2} = \underline{\underline{\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, s}}$$

---

31. I. Hauptbedingung:

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

II. Nebenbedingungen:

Aus dem Strahlensatz folgt:

$$\frac{r}{H-h} = \frac{R}{H} \quad |\cdot(H-h)$$

$$r = \frac{R}{H}\cdot(H-h) = R - \frac{R}{H}\cdot h \quad |-R$$

$$r - R = -\frac{R}{H}\,h \quad |\cdot\left(-\frac{H}{R}\right)$$

$$H - \frac{H}{R}\cdot r = h$$

III. Zielfunktion:

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \left(H - \frac{H}{R}\cdot r\right)$$
$$= -\frac{1}{3}\pi \frac{H}{R} r^3 + \frac{1}{3}\pi H r^2$$

IV Extremalrechnung:

$$V'(r) = -\pi \frac{H}{R} r^2 + \frac{2}{3}\pi H r \overset{!}{=} 0$$

$$-\pi \frac{H}{R}\cdot r^2 + \frac{2}{3}\pi H r = 0 \quad |:\left(-\pi \frac{H}{R}\right)$$

$$r^2 - \frac{2}{3}R r = 0 \quad |\text{Vorklammern}$$

$$r\cdot\underbrace{\left(r - \tfrac{2}{3}R\right)}\ = 0$$

$r_1 = 0$

$$r_2 - \frac{2}{3}R = 0 \quad |+\frac{2}{3}R$$

$$\Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{2}{3}R}$$

r_1 scheidet aus, da hier das Volumen Null wird ⇒ Minimum

$$\Rightarrow h = H - \frac{H}{R}\cdot r = \frac{1}{3}H$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{3}H}$$