11. $f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 2x$

a) (1) Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 0{,}5 \cdot x^3 - 2x = 0 \Rightarrow \underbrace{x}_{x_1=0} \cdot \underbrace{(0{,}5x^2 - 2)}_{x_2=-2\ x_2=+2} = 0$$

(2) Symmetrie:

$$f(x) \overset{?}{=} -f(-x)$$

$$f(-x) = 0{,}5 \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x) = -0{,}5x^3 + 2x = -(0{,}5x^3 - 2x) = -f(x)$$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrisch zum Ursprung!

b) $f'(x) = 1{,}5x^2 - 2$, $f''(x) = 3x$, $f'''(x) = 3$

(1) Extrema: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \approx -1{,}1547 \quad x_2 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}1547$

$f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ Max! $\quad f(x_1) \approx 1{,}5396 \Rightarrow P_{Max}(-1{,}1547 \mid 1{,}5396)$

$f''(x_2) > 0 \Rightarrow$ Min! $\quad f(x_2) \approx -1{,}5396 \Rightarrow P_{Min}(+1{,}1547 \mid -1{,}5396)$

(2) Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_w = 0$

$f'''(x_w) = 3 > 0 \Rightarrow$ Rechts-links-Wendepunkt

$f(x_w) = 0 \Rightarrow P_w(0 \mid 0)$

c) Bitte Funktionenplotter verwenden!

d) Die Nullstellentangente hat die Steigung des Graphen an der Position der Nullstelle und verläuft zudem durch die Nullstelle.

$x_1 = 0 \Rightarrow m_1 = f'(0) = -2 \Rightarrow$ Nullstellentangente: $g_1(x) = -2 \cdot x + b_1$

$P(0 \mid 0) \Rightarrow g_1(0) = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow \boxed{g_1(x) = -2x}$

$x_2 = -2 \Rightarrow m_2 = f'(x_2) = 4 \Rightarrow g_2(x) = 4 \cdot x + b_2$

$P(-2 \mid 0) \Rightarrow g_2(-2) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (-2) + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 8 \Rightarrow \boxed{g_2(x) = 4x + 8}$

$x_3 = 2 \Rightarrow m_3 = f'(x_3) = 4 \Rightarrow g_3(x) = 4x + b_3$

$P(2 \mid 0) \Rightarrow g_3(2) = 0 \Rightarrow b_3 = -8 \Rightarrow \boxed{g_3(x) = 4x - 8}$

e) g_2 und g_3 sind parallel ($g_2 \parallel g_3$), d.h. sie schneiden sich nicht.

g_1 und g_2: Der Schnittwinkel entspricht der Differenz der Steigungswinkel der beiden Geraden.

$\tan(\alpha_1) = m_1 \Rightarrow \alpha_1 = \arctan(-2) \Rightarrow \alpha_1 \approx -63{,}435°$

$\tan(\alpha_2) = m_2 \quad \alpha_2 = \arctan(m_2) \quad \alpha_2 \approx 75{,}964$

Schnittwinkel σ: $\sigma = \alpha_2 - \alpha_1 \approx 139{,}399$

Gleichgroß der Schnittwinkel zwischen g_1 und g_3

12. $f(x) = x^4 - 6{,}25x^2 + 9 \quad f'(x) = 4x^3 - 12{,}5x \quad f''(x) = 12x^2 - 12{,}5 \quad f'''(x) = 24x$

a) (1) Nullstellen: Durch Lösung biquadratischer Gleichung mit PQ

$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -1{,}5,\ x_3 = 1{,}5,\ x_4 = 2$

(2) Symmetrie:

$f(-x) = (-x)^4 - 6{,}25 \cdot (-x)^2 + 9 = x^4 - 6{,}25 \cdot x^2 + 9 = f(x) \Rightarrow$ Achsensymm. zur y-Achse!

b) (1) Extrema: Lösung mittels Vorklammern von x!

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_{E1} = -\frac{5}{4} \cdot \sqrt{2} \approx -1{,}768,\ x_{E2} = \frac{5}{4}\sqrt{2} \approx 1{,}768,\ x_{E3} = 0$

x_{E2}: $f''(x_{E2}) = 25 > 0 \Rightarrow$ Min! $\quad f(x_{E2}) = -\frac{49}{64} \approx -0{,}766 \Rightarrow P_{Min}(\frac{5}{4}\sqrt{2} \mid -\frac{49}{64})$

x_{E1}: $f''(x_{E1}) = 25 > 0 \Rightarrow$ Min! $\quad f(x_{E1}) = -\frac{49}{64} \approx -0{,}766 \Rightarrow P_{Min}(-\frac{5}{4}\sqrt{2} \mid -\frac{49}{64})$

x_{E3}: $f''(x_{E3}) = -12{,}5 < 0 \Rightarrow$ Max! $\quad f(x_{E3}) = 9 \Rightarrow P_{Max}(0 \mid 9)$

(2) Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12{,}5 = 0 \mid +12{,}5 \mid :12 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{24} \mid \sqrt{\ }$

$x_{W1} = \frac{5}{12} \cdot \sqrt{6},\ x_{W2} = -\frac{5}{12} \cdot \sqrt{6}$

x_{W1}: $f'''(x_{W1}) = 10 \cdot \sqrt{6} > 0 \Rightarrow$ Rechts-links-Wendepunkt!

$f(x_{W1}) = \frac{2059}{576} \approx 3{,}575 \Rightarrow P_{W1}(\frac{5}{12}\sqrt{6} \mid \frac{2059}{576}) \approx P_{W1}(1{,}021 \mid 3{,}575)$

x_{W2}: $f'''(x_{W2}) = -10 \cdot \sqrt{6} \Rightarrow$ Links-rechts-Wendepunkt!

$f(x_{W2}) = \frac{2059}{576} \approx 3{,}575 \Rightarrow P_{W2}(-\frac{5}{12} \cdot \sqrt{6} \mid \frac{2059}{576}) \approx P_{W2}(-1{,}021 \mid 3{,}575)$

c) Bitte Funktionenplotter verwenden!

d) Die Wendetangente geht durch den Wendepunkt und hat die selbe Steigung wie der Graph in diesem Punkt. Zur Berechnung werden obige Näherungswerte verwendet.

x_{W1}: $f'(x_{W1}) \approx -8{,}505 = m_1 \Rightarrow g_1(x) = -8{,}505 \cdot x + b_1$

$P(1{,}021 \mid 3{,}575) \Rightarrow g_1(1{,}021) = 3{,}575 \Rightarrow b_1 \approx 12{,}259 \Rightarrow \boxed{g_1(x) = -8{,}505 \cdot x + 12{,}259}$

x_{W2}: $f'(x_{W2}) \approx 8{,}505 = m_2 \Rightarrow g_2(x) = 8{,}505 \cdot x + b_2$

$P(-1{,}021 \mid 3{,}575) \Rightarrow b_2 = 12{,}259 \Rightarrow \boxed{g_2(x) = 8{,}505 \cdot x + 12{,}259}$

EMa | Lösungen S.208/14 / 12

e) (1) Bestimmung der Eckpunkte → Lösen Sie diese Teilaufg. am Besten mittels Skizze zur Anschauung.

→ Schnittpunkte mit x-Achse:

$g_1(x)=0 \Rightarrow x_1 = 1{,}441 \Rightarrow \boxed{B(1{,}441\,|\,0)}$

$g_2(x)=0 \Rightarrow x_2 = -1{,}441 \Rightarrow \boxed{A(-1{,}441\,|\,0)}$

→ Schnittpunkt von g_1 und g_2:

$g_1(x)=g_2(x) \Rightarrow -8{,}505\cdot x+12{,}259 = 8{,}505\cdot x+12{,}259$

$\Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow g_1(x_3)=12{,}259 \Rightarrow \boxed{C(0\,|\,12{,}259)}$

(2) Bestimmung d. Schnittwinkel:

- g_2 & x-Achse:

  $\tan(\alpha) = m_2 \Rightarrow \alpha = \arctan(8{,}505) \approx \underline{\underline{83{,}294°}}$

- g_1 & x-Achse

  $\tan(-\beta) = m_1 \Rightarrow -\beta = \arctan(-8{,}505) \approx -83{,}294° \Rightarrow \beta = \underline{\underline{83{,}294°}}$

- g_1 & g_2: Winkelsumme im Dreieck ist 180°

  $\Rightarrow \gamma = 180° - \alpha - \beta \approx \underline{\underline{13{,}412°}}$

f) $g(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \qquad g'(x) = 2ax+b \qquad g''(x) = 2a$

$S(0|9): \Rightarrow g(0)=9 \Rightarrow \boxed{c=9}$

$g'(0)=0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

$x_1 = 1{,}5 \Rightarrow g(1{,}5)=0 \Rightarrow a\cdot 1{,}5^2+9=0 \Rightarrow \boxed{a=-4}$

$\Rightarrow \boxed{g(x) = -4x^2+9}$

g) → Durch den Graphen

h) z.B. durch den Graphen der Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$.