E Ma Lösungen zum Übungsblatt „Steckbriefaufgaben" 11.06.13

1. a) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$

Bedingungen	Gleichungen	
Symm. zum Ursprung		$a=1$
$P(1\|-2) \Rightarrow f(1)=-2$	$a+c=-2$	$b=0$
$TP \Rightarrow f'(1)=0$	$3a+c=0$	$c=-3$
		$d=0$

$\boxed{f(x)=x^3-3x}$

b) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$

Bedingungen	Gleichungen	
$P(0\|0) \Rightarrow f(0)=0$	$d=0$	$a=-1$
Extr. bei $x=0 \Rightarrow f'(0)=0$	$c=0$	$b=3$
$P(2\|4) \Rightarrow f(2)=4$	$8a+4b=4$	$c=0$
Extr. bei $x=2 \Rightarrow f'(2)=0$	$12a+4b=0$	$d=0$

$\boxed{f(x)=-1x^3+3x^2}$

2. a) $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

Bedingungen	Gleichungen	Lösungen
$P(0\|3) \Rightarrow f(0)=3$	$e=3$	$a=\frac{1}{9}$
$SP \Rightarrow f'(0)=0$	$d=0$	$b=-\frac{4}{9}$
$f''(0)=0$	$c=0$	
$Q(3\|0) \Rightarrow f(3)=0$	$81a+27b+e=0$	$c=0$
waagr. Tang. $\Rightarrow f'(3)=0$	$108a+27b=0$	$d=0$
		$e=3$

$\boxed{f(x)=\frac{1}{9}\cdot x^4-\frac{4}{9}\cdot x^3+3}$

b) $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

Bedingungen	Gleichungen	Lösungen
$H(2\|4) \Rightarrow f(2)=4$	$16a+8b+2d=4$	$a=-\frac{1}{2}$
$HP \Rightarrow f'(2)=0$	$32a+12b+d=0$	$b=\frac{5}{4}$
$W(0\|0) \Rightarrow f(0)=0$	$e=0$	$c=0$
$WP \Rightarrow f''(0)=0$	$c=0$	$d=1$
Wendetangente Steigung 1 $\Rightarrow f'(0)=1$	$d=1$	$e=0$

$\boxed{f(x)=-\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{4}x^3+x}$

E Ma „Übungsblatt Steckbriefaufgaben" – Musterlösungen 11.06.13

2. c) $f(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+e$ $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$

Bedingungen	Gleichungen	Lösungen
$T(0\|0) \Rightarrow f(0)=0$	$e=0$	$a=1$
$TP \Rightarrow f'(0)=0$	$d=0$	$b=-8$
Extr. bei $x=3 \Rightarrow f'(3)=0$	$108a+27b+6c=0$	$c=18$
$W(1\|11) \Rightarrow f(1)=11$	$a+b+c=11$	$d=0$
$WP \Rightarrow f''(1)=0$	$12a+6b+2c=0$	$e=0$

$\boxed{f(x)=x^4-8x^3+18x^2}$

3.

a) Aus „Die Tangente des Graphen an der Stelle 1 hat die Gleichung $g(x)=3{,}5x-1$" folgt

→ Der Graph hat bei $x=1$ die Steigung 3,5

→ Der Graph geht durch den Punkt $P(1|g(1)) = P(1|3{,}5\cdot 1-1) = P(1|2{,}5)$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$

Bedingungen	Gleichungen	Lösungen
Symmetrie Urspr.		$a=\frac{1}{2}$
$P(1\|2{,}5) \Rightarrow f(1)=2{,}5$	$a+c=2{,}5$	$b=0$
Steigung 3,5 bei $x=1$ $\Rightarrow f'(1)=3{,}5$	$3a+c=3{,}5$	$c=2$
		$d=0$

$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}x^3+2\cdot x}$

b) $g(x)=\frac{1}{2}\cdot(4x^3+x)=2x^3+\frac{1}{2}x$

„Schneidet den Graphen von g im Ursprung senkrecht"

$\Rightarrow P(0|0)$ ist Punkt des Graphen

$\Rightarrow$ Berechnung der Steigung im Ursprung:

$g'(x)=6x^2+\frac{1}{2} \Rightarrow g'(0)=\frac{1}{2}=m_g$

Die Steigung der gesuchten Funktion $f'(0)=m_f$ ist senkrecht dazu:

$m_f\cdot m_g=-1 \Rightarrow m_f=-\frac{1}{m_g}=-2$

„Weiterer Schnittpunkt bei $x=1$"

$\Rightarrow P(1|g(1)) = P(1|\frac{5}{2})$

EMa Lösungen zum Übungsblatt „Steckbriefaufgaben" 11.06.13

3. b) Fortsetzung

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen	Gleichungen	Lösungen
Punktsymmetrisch		$a = \frac{9}{2}$
$P(0\|0)$	$0 = 0$	$b = 0$
$Q(1\|\frac{5}{2})$	$a + c = \frac{5}{2}$	$c = -2$
$f'(0) = -2$	$c = -2$	$d = 0$

$\boxed{f(x) = \frac{9}{2}x^3 - 2x}$

c) 1. Bestimmung des Scheitelpunktes der Parabel $g(x) = x^2 + x$ $\quad g'(x) = 2x + 1$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_s = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(x_s \mid g(x_s)) = P(-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4})$ ist Punkt der gesuchten Fkt.

2. „berührt..." $\Rightarrow$ hat gleiche Steigung wie Scheitelpunkt der Parabel

$\Rightarrow f'(-\frac{1}{2}) = 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen	Gleichungen	Lösungen
$P(-\frac{1}{2}\|-\frac{1}{4})$	$-\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c + d = -\frac{1}{4}$	$a = -5$
$f'(-\frac{1}{2}) = 0$	$\frac{3}{4}a - b + c = 0$	$b = 0$
$W(0\|1)$	$d = 1$	$c = \frac{15}{4}$
$WP \Rightarrow f''(0) = 0$	$b = 0$	$d = 1$

$\boxed{f(x) = -5x^3 + \frac{15}{4}x + 1}$