1. Nullstellen ganzrationaler Funktionen

a) $f(x) = -3\cdot\underbrace{(x+2)}_{\substack{x+2=0\\ \Rightarrow x_1=-2}}\cdot\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)}_{\substack{x-\frac{1}{2}=0\\ \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}}}\cdot 5\cdot\underbrace{(x^2-4)}_{\substack{x^2=4\\ \Rightarrow x_3=2,\ x_4=-2}}\cdot\underbrace{x}_{x_5=0} \overset{!}{=} 0$ D2

b) $f(x) = 2\cdot x^4 - 26x^2 + 72 \overset{!}{=} 0 \quad |:2$

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad | \; z = x^2$ [+1]

$z^2 - 13z + 36 = 0 \quad | PQ$ [+1]

$z_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36}$ [+1]

$\Rightarrow z_1 = 9 \qquad \Rightarrow z_2 = 4$

$\Rightarrow x_1 = \underline{3} \quad x_2 = \underline{-3} \qquad \Rightarrow x_3 = \underline{2} \quad x_4 = \underline{-2}$ [+1] D4

c) $f(x) = 18x^3 - 45x^2 - 17x + 70 \overset{!}{=} 0$

↳ Nullstelle erraten: $x_1 = \underline{2}$ $\Rightarrow$ Linearfaktor $(x-2)$ [+1]

→ Polynomdivision: [+3]

$$
\begin{array}{l}
(18x^3 - 45x^2 - 17x + 70) : (x-2) = 18x^2 - 9x - 35 \\
\underline{-(18x^3 - 36x^2)} \\
\quad -9x^2 - 17x \\
\quad \underline{-(-9x^2 + 18x)} \\
\qquad -35x + 70 \\
\qquad \underline{-(-35x + 70)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

→ Bestimmung übriger Nullstellen:

$18x^2 - 9x - 35 = 0 \quad |:18$

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{35}{18} = 0 \quad | PQ$

$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{35}{18}}$

$x_2 = \frac{5}{3} \approx 1,\overline{6} \qquad x_3 = -\frac{7}{6} = -1,1\overline{6}$ +[1,5] D5,5

d) $f(x) = 3\cdot x^5 - 21\cdot x^4$

$0 = 3\cdot x^5 - 21\cdot x^4 = \underbrace{x^4}_{x_1=0}\cdot\underbrace{(3x-21)}_{3x-21=0}$ $\quad |+21 \quad |:3$ D3

$x_2 = \underline{7}$

2. Aufgaben zu Ganzrationalen Funktionen

a) 3 D0,5

b) $f(-5) = (-5)^3 + 3\cdot(-5)^2 + 5 - 3 = -48 \Rightarrow P(-5|-48)$ liegt auf dem Funktionsgraphen. D1,5

c) $P(-5|-48) \Rightarrow g(-5) = -48$ [+1] $\Rightarrow 3\cdot(-5)^2 + b\cdot(-5) + 3 = -48 \quad | T$ [+1]

$75 - 5b + 3 = -48 \quad |-78$

$-5b = -126 \quad |:(-5)$ Z1

$\Rightarrow b = \frac{126}{5} \approx \underline{\underline{25,2}}$ [+1] D2

d) $h(x) = k(x) \Rightarrow 2\cdot x^2 + x + 3 = 5\cdot x + 9 \quad |-5x-9$ [+1]

$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad |:2$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad | PQ$

$\Rightarrow x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1^2 + 3} \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -1$ [+2]

$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = k(x_1) = 5\cdot 3 + 9 = 24 \Rightarrow S_1(3|24)$

$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = k(x_2) = 5\cdot(-1) + 9 = 4 \Rightarrow S_2(-1|4)$ [+1] D4

e) $k(x) = 5\cdot x + 9 \Rightarrow m = 5$

$\tan(\alpha) = m \Rightarrow \alpha = \arctan(m) = \arctan(5) \approx \underline{78,69°}$ D1

f) → a in die Funktion einsetzen!

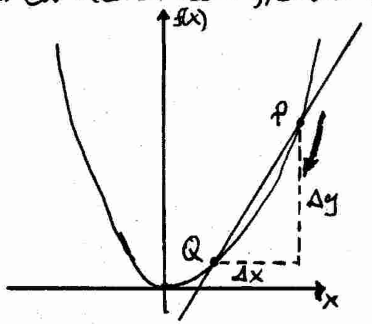
$g(a) = a^3 + (-a-5)\cdot a^2 + (5\cdot a + 6)\cdot a - 6a$ [+1]

$= a^3 - a^3 - 5a^2 + 5a^2 + 6a - 6a$ [+1]

$= \underline{0}$ qed. [+1] Z3

3. Der Grenzwert des Differenzenquotienten a.1) D3, a.2) D1

a.1)



a.2) Steigungsdreieck für die Sekantensteigung der Sekante durch P und Q:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

3. - Fortsetzung -

a.3) Es bewirkt anschaulich das Hinzubewegen des Punktes P auf den Punkt Q. Dabei nähert sich der Wert x des Punktes P immer näher dem Wert a des Punktes Q an. D1

b) $$m_T = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) + h(x) - (g(a) + h(a))}{x - a} \right)$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) + h(x) - g(a) - h(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - g(a) + h(x) - h(a)}{x - a} \right)$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) + \lim_{x \to a} \left(\frac{h(x) - h(a)}{x - a} \right)$$

qed. Z3,5 E1

4. Tangentensteigung in einem Punkt

$$m_T = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{2x^3 - 2a^3}{x - a} \right)$$ [+1]

→ Polynomdivision:

$$(2x^3 - 2a^3) : (x - a) = 2x^2 + 2ax + 2a^2$$

$$\begin{array}{l} -(2x^3 - 2ax^2) \\ \hline 2ax^2 - 2a^3 \\ -(2ax^2 - 2a^2x) \\ \hline 2a^2x - 2a^3 \\ -(2a^2x - 2a^3) \\ \hline 0 \end{array}$$ [+3]

→ Bilden des Grenzwertes:

$$m_T = \lim_{x \to a} (2x^2 + 2ax + 2a^2) = 2a^2 + 2a \cdot a + 2a^2 = 6a^2$$ qed. [+1] Z1 E5

5. Abitungsfunktionen bestimmen

a) $f(x) = -2x^4 + x - 1$

$f'(x) = -8x^3 + 1$

b) $f(x) = \frac{2}{x^3} = 2 \cdot x^{-3}$

$f'(x) = -6x^{-4}$

c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

$f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$

$f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{2/3}$

e) $f(x) = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[5]{x^2}} = \frac{3}{4} \cdot x^{-2/5}$

$f'(x) = -\frac{3}{10} \cdot x^{-7/5}$

f) $f(x) = \underset{g}{x^2} \cdot \underset{h}{\sin(x)}$

$f'(x) = \underset{g'}{2x} \cdot \underset{h}{\sin(x)} + \underset{g}{x^2} \cdot \underset{h'}{\cos(x)}$

a) D2
b) D2
c) D1,5
d) D2
e) D2
f) D3

3

5. - Fortsetzung -

g) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x} = \underset{g(h(x))}{(x^3 - 3x)^{1/2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 3x)^{-1/2} \cdot (3x^2 - 3)$

g) D2 Z1

h) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2x - 1} = \cos(x) \cdot (2x - 1)^{-1}$

$f'(x) = -\sin(x) \cdot (2x - 1)^{-1} + \cos(x) \cdot (-1) \cdot (2x - 1)^{-2} \cdot 2$

h) Z3

6. Die Ableitung des Tangens

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \cdot (\cos(x))^{-1}$$ [+1]

$$(\tan(x))' = \cos(x) \cdot (\cos(x))^{-1} + \sin(x) \cdot (-1) \cdot (\cos(x))^{-2} \cdot (-\sin(x))$$

$$= 1 + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} \overset{[+1]}{=} \frac{(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} \overset{[+1]}{=} \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$$ [+1]

$$= \frac{1}{(\cos(x))^2}$$ [+1], da $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$. E6

Notenschlüssel:

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
min. %	0	20	27	34	41	46	51	56	61	66	71	76	81	86	91	96
min. Pkt.	0	13,5	18,5	23	28	31,5	35,5	38	41,5	45	48	51,5	55	58,5	61,5	65

Gesamtpunktzahl: 67,5